УДК 519.83

# Минимаксная оптимизация терминального программного управления процессом сближения в двухуровневой иерархической дискретной динамической системе

**А.Ф. Шориков**
**Уральский федеральный университет, Екатеринбург**
afshorikov@mail.ru

В данном докладе рассматривается дискретная динамическая система, состоящая из трех управляемых объектов, динамика каждого из которых описывается соответствующим векторным линейным дискретным рекуррентным соотношением. Приведена формализация задачи минимаксной оптимизации терминального программного управления процессом сближения с неполной информацией [1-3] для данной динамической системы и общая схема ее решения, основывающаяся на результатах из работ [1-4].

Ключевые слова: двухуровневая динамическая система, процесс сближения, терминальное программное управление, задача минимаксной оптимизации.

Пусть на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T} = \{0,1,...,T\}$ $(T > 0)$ рассматривается многошаговая динамическая система, которая состоит из трех управляемых объектов. Динамика объекта $I$ – основного, управляемого доминирующим игроком $P$, описывается векторным линейным дискретным рекуррентным соотношением вида

$$y(t+1) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + C(t)u^{(1)}(t),\ y(0) = y_0, \tag{1}$$

динамика объекта $I_1$ – вспомогательного, управляемого подчиненным игроком $S$, описывается следующим соотношением

$$y^{(1)}(t+1) = A^{(1)}(t)y^{(1)}(t) + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)u^{(1)}(t),$$
$$y^{(1)}(0) = y_0^{(1)}, \tag{2}$$

и динамика объекта $II$, управляемого игроком $E$ – уклоняющимся, описывается соотношением вида

$$z(t+1) = \overline{A}(t)z(t) + \overline{B}(t)v(t),\ z(0) = z_0. \tag{3}$$

Здесь $t \in \overline{0, T-1}$; $y \in \mathbf{R}^r$, $y^{(1)} \in \mathbf{R}^{r_1}$ и $z \in \mathbf{R}^s$ – фазовые векторы объектов *I*, $I_1$ и *II* соответственно ($r, r_1, s \in \mathbf{N}$; $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел; для $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}^k$ есть k-мерное векторное пространство); $u(t) \in \mathbf{R}^p$, $u^{(1)}(t) \in \mathbf{R}^{p_1}$ и $v(t) \in \mathbf{R}^q$ – векторы управляющих воздействий (управлений) игроков *P*, *S* и *E* соответственно, стесненные заданными ограничениями

$$u(t) \in \mathrm{U}_1,\ u^{(1)}(t) \in \mathrm{U}_1^{(1)},\ v(t) \in \mathrm{V}_1; \tag{4}$$

действительные матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ определяют динамику объекта *I* и имеют размерности $(r \times r)$, $(r \times p)$ и $(r \times p_1)$ соответственно; действительные матрицы $A^{(1)}(t)$, $B^{(1)}(t)$ и $C^{(1)}(t)$ определяют динамику объекта $I_1$ и имеют размерности $(r_1 \times r_1)$, $(r_1 \times p)$ и $(r_1 \times p_1)$ соответственно; действительные матрицы $\overline{A}(t)$ и $\overline{B}(t)$ определяют динамику объекта *II* и имеют размерности $(s \times s)$ и $(s \times q)$ соответственно; для всех $t \in \overline{0, T-1}$ каждая из матриц $A(t)$, $A^{(1)}(t)$ и $\overline{A}(t)$ является невырожденной, т.е. для них существуют соответствующие им обратные матрицы $[A(t)]^{-1}$, $[A^{(1)}(t)]^{-1}$ и $[\overline{A}(t)]^{-1}$.

Предполагается также, что для всех моментов времени $t \in \overline{0, T}$ фазовые векторы $y(t)$, $y^{(1)}(t)$ и $z(t)$ объектов *I*, $I_1$ и *II* соответственно, кроме удовлетворения начальным условиям в соотношениях (1)–(3), стеснены следующими заданными ограничениями

$$y(t) \in \mathrm{Y}_1,\ y^{(1)}(t) \in \mathrm{Y}_1^{(1)},\ z(t) \in \mathrm{Z}_1, \tag{5}$$

где в ограничениях (4), (5) множества $\mathrm{U}_1$, $\mathrm{U}_1^{(1)}$, $\mathrm{V}_1$, $\mathrm{Y}_1$, $\mathrm{Y}_1^{(1)}$ и $\mathrm{Z}_1$ являются выпуклыми многогранниками в соответствующих конечномерных векторных пространствах (здесь и далее, под выпуклым многогранником в конкретном конечномерном векторном пространстве понимается выпуклая оболочка конечного числа точек).

Игроки *P*, *S* и *E* в совокупности образуют основной (или первый) уровень рассматриваемого процесса управления, и в сфере их интересов находятся значения фазовых векторов объектов *I*, $I_1$ и *II*.

Игрок $S$ в одиночку образует второстепенный (или второй) уровень рассматриваемого процесса управления, и в сфере его интересов находятся значения фазового вектора только объекта $I_1$, которые зависят и от поведения игрока $P$.

Процесс управления в дискретной динамической системе (1)–(5) реализуется при наличии следующих информационных условий.

Игроком $P$ для любого момента времени $\tau \in \overline{1,T}$ измеряются и запоминаются значения следующих величин: $y(0) = y_0$; $y^{(1)}(0) = y_0^{(1)}$; $u_\tau(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0,\tau\text{-}1}}$; $u_\tau^{(1)}(\cdot) = \{u^{(1)}(t)\}_{t \in \overline{0,\tau\text{-}1}}$; $\omega_\tau(\cdot) = \{\omega(t)\}_{t \in \overline{0,\tau}}$ ($\omega(t) \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m \le s$) есть история реализации информационного сигнала на промежутке времени $\overline{0,\tau}$, значения которого $\omega(t)$ ($\omega(0) = \omega_0$ – фиксировано) для всех $t \in \overline{0,\tau}$ генерируются в соответствии со следующим дискретным векторным уравнением

$$\omega(t) = G(t, y(t), z(t)) + F(t)\lambda(t), \ \lambda(t) \in \Lambda_1, \tag{6}$$

где $\lambda(t) \in \mathbf{R}^l$ есть ошибка (погрешность) измерений; множество $\Lambda_1$ есть выпуклый многогранник в пространстве $\mathbf{R}^l$; $F(t)$ – действительная матрица размера $(m \times l)$; функция $G : \overline{0,T} \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ для всех $t \in \overline{0,T}$ непрерывна по совокупности переменных $(y(t), z(t))$; для фиксированных $t \in \overline{0,T}$, $y_*(t) \in \mathrm{Y}_1$ и $\varpi_*(t) \in \mathbf{R}^m$ множество $H(t, y_*(t), \varpi_*(t)) = \{z : z \in \mathbf{R}^s, \ \omega_*(t) = G(t, y_*(t), z(t))\}$ есть выпуклое многогранное множество в пространстве $\mathbf{R}^s$.

В течение процесса управления игроку $P$ известно также множество $Z(0) = Z_0 \subseteq \mathrm{Z}_1$ всех возможных состояний начального фазового вектора $z(0) = z_0$ объекта $II$, которое совместимо [1] с начальным информационным сигналом $\omega_0$, являющееся выпуклым многогранником в пространстве $\mathbf{R}^s$.

Игроком $S$ для любого момента времени $\tau \in \overline{1,T}$ измеряются и запоминаются значения следующих величин: $y^{(1)}(0) = y_0^{(1)}$; $u_\tau(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0,\tau\text{-}1}}$; $u_\tau^{(1)}(\cdot) = \{u^{(1)}(t)\}_{t \in \overline{0,\tau\text{-}1}}$. При этом предполагается, что в любой момент времени $t \in \overline{0,T-1}$ выбор игроком $S$ своего управления $u^{(1)}(t)$ стеснен не только ограничением (4), но и зависит от выбора управления $u(t) \in \mathrm{U}_1$ игроком $P$ на основании априори заданного отображения:

$$\Psi_1 : \mathrm{U}_1 \to \mathrm{U}_1^{(1)};\ \forall\, t \in \overline{0,T-1},\ \forall\, u(t) \in \mathrm{U}_1,\ u^{(1)}(t) \in \Psi_1(u(t)) \subseteq \mathrm{U}_1^{(1)}, \quad (7)$$

где $\Psi_1(u(t))$ есть выпуклый многогранник в пространстве $\mathbf{R}^{p_1}$ для всех $u(t) \in \mathrm{U}_1$.

Предполагается также, что в рассматриваемом процессе управления для любого момента времени $t \in \overline{0,T}$ игроку $P$ известны соотношения (1)–(7), а игроку $S$ известны соотношения (2) – (5), (7).

В рассматриваемом процессе предполагается, что игрок $E$ может располагать полной информацией о параметрах дискретной динамической системы (1)–(7) на промежутке времени $\overline{0,T}$.

Для исследуемой динамической системы в данной работе предлагается математическая формализация в форме решения многошаговой задачи минимаксной оптимизации терминального программного управления процессом сближения в двухуровневой иерархической дискретной динамической системе с неполной информацией и предложена общая схема ее решения. Полученные в работе результаты основываются на исследованиях [1]-[4] и могут быть использованы при компьютерном моделировании и создании многоуровневых систем управления для сложных механических, экономических и др. динамических процессов, функционирующих в условиях риска и неопределенности. Математические модели таких процессов представлены, например, в работах [1]-[3].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 12-01-00043-а).

**Библиографический список**

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1974. 1976.
3. Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
4. Шориков А.Ф. Двухуровневое минимаксное управление в нелинейной многошаговой системе // Тез. докл. V Всесоюз. конф. по оптимальному управлению в механических системах. Казань: Изд-во КАИ, 1985. С. 62.

# Minimax optimization of terminal program control of the process of rapprochement in two-level hierarchical discrete dynamic system

A.F. Shorikov
Ural federal university,
Ekaterinburg
afshorikov@mail.ru

In this report the discrete dynamic system consisting of three controlled objects is considered, dynamics of each object is described by the corresponding vector linear discrete recurrence relation. Formalization of a problem of minimax optimization of terminal program control of the process of rapprochement with incomplete information for this dynamic system and the general scheme of its decision which is based on results from works are given.

Keywords: two-level dynamic system, rapprochement process, terminal program control, problem of minimax optimization.

**References**

1. Krasovskiy N. N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Position Differential Games]. Moscow, Science Publ., 1974.
2. Kurzhanskiy A.B. *Upravlinie i nabluydenie v usloviyach neopredelennosti* [Control and Supervision in the Conditions of Uncertainty]. Moscow, Science Publ., 1976.
3. Shorikov A.F. *Minimaksnoe otsenivanie i upravlenie v diskretnych dinamicheskich sistemach* [Minimax Estimation and Control in Discrete Dynamic Systems]. Ekaterinburg, Ural Un. Publ., 1997.
4. Shorikov A.F. *Dvuch-urovnevoe minimaksnoe upravlenie v nelineynoy mnogoshagovoy sisteme*. Tezisy dokladov V vsesoyuz. konf. po optimal'nomu upravleniyu v mechanicheskich sisteme [Two-level Minimax Control in Nonlinear Multistep System]. Reports of V all-Union Conf. on optimum control in mechanical systems. Kazan, KAI Publ., 1985, pp. 62.