УДК 519.21.5

О влиянии случайного изменения параметров модели системы на ее вероятностные характеристики

Е.А. Алёшин

Рассматриваются вопросы оценки влияния случайного разброса параметров модели системы на ее вероятностные характеристики с помощью аналитических и численных методов.

Ключевые слова: случайный разброс параметров, вероятностные характеристики, оценка, модель системы.

Оценки влияния случайного разброса параметров модели системы на ее вероятностные характеристики обычно проводятся на всех этапах проектирования: сначала при выборе структуры и параметров системы, чтобы система была мало чувствительной к этим разбросам, а на конечном этапе – для получения вероятностных характеристик системы с учетом разброса параметров.

Согласно [1], под оценкой влияния случайного разброса параметров на вероятностную характеристику λ модели системы будем понимать определение зависимости изменения $\delta\lambda$ вероятностной характеристики от вероятностных характеристик случайного разброса параметров. Методы оценки влияния случайного разброса параметров на вероятностные характеристики модели системы основываются на использовании априорной информации о малости этого влияния, что позволяет применить аналитические методы, рассматривать упрощенную систему, а также ограничится оценкой сверху влияния разброса параметров [2].

Если в результате упрощения исходной системы оказывается, что для поучения вероятностной характеристики системы при конкретных значениях ее параметров применимы аналитические методы, то это означает, что для любого вектора случайного отклонения параметров системы $\Delta\alpha$ может быть получено условное значение $\mu(\Delta\alpha)$ вероятностной характеристики упрощенной системы. Тогда, используя $\mu(\Delta\alpha)$, по формуле

$$\mu = \int \mu(\Delta\alpha) f(\Delta\alpha) d\Delta\alpha \qquad (1)$$

можно найти значение μ вероятностной характеристики упрощенной системы. В соответствии с [1] изменение $\delta\lambda$ вероятностной характеристики исходной системы можно приближенно вычислить как изменение $\delta\mu$ соответствующей вероятностной характеристики упрощенной системы, т.е.

$$\delta\lambda = \int \mu(\Delta\alpha) f(\Delta\alpha) d\Delta\alpha - \mu(0) \qquad (2)$$

При малом влиянии разброса параметров на вероятностные характеристики системы функция $\mu(\Delta\alpha)$ может быть разложена в ряд по степеням компонент вектора $\Delta\alpha$ и ограничиться членами минимального порядка. Так как $M[\Delta\alpha]=0$, то минимальный порядок разложения равен двум и

$$\delta\lambda = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left.\frac{\partial^2\mu(\Delta\alpha)}{\partial\Delta\alpha_p\partial\Delta\alpha_q}\right|_{\Delta\alpha=0} K_{\alpha_p\alpha_q}, \qquad (3)$$

где $K_{\alpha_p\alpha_q}$ – корреляционный момент случайных величин $\Delta\alpha_p$ и $\Delta\alpha_q$.

Формула (3) определяет изменение $\delta\lambda$ вероятностной характеристики за счет случайного разброса параметров. Для вычисления $\delta\lambda$ необходимо знать корреляционные моменты $K_{\alpha_p\alpha_q}$ разбросов параметров и вычислять вторые производные $\dfrac{\partial^2\mu(\Delta\alpha)}{\partial\Delta\alpha_p\partial\Delta\alpha_q}$. Возможны два варианта представления функции $\mu(\Delta\alpha)$. В первом варианте считаем, что функция $\mu(\Delta\alpha)$ представляется аналитически, тогда вторые производные в принципе могут быть вычислены, а значит, получена оценка влияния разброса параметров на вероятностные характеристики системы. Во втором варианте для нахождения $\delta\lambda$ можно применить численный метод определения коэффициентов разложения через значение $\mu(\Delta\alpha)$ при конкретных значениях вектора параметров $\Delta\alpha$.

Идея численного метода заключается в следующем. Предварительно вектор $\Delta\alpha$ коррелированных случайных величин путем линейного преобразования, характеризуемого матрицей B [2], приводится к вектору $\Delta\beta$ некоррелированных величин $\Delta\beta = B\Delta\alpha$. Базируясь на (3), получаем

$$\delta\lambda = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{m} a_q\sigma_{\beta_q}^2, \qquad (4)$$

где a_q – вторые производные (коэффициенты); σ_{β_q} – средние квадратические отклонения случайной величины $\Delta\beta_q$. При этом величины $\sigma_{\beta_q}^2$ будут диагональными членами матрицы $K_{\beta\beta}$, определяемой как

$$K_{\beta\beta} = BK_{\alpha\alpha}B^{\mathrm{T}}, \qquad (5)$$

где $K_{\alpha\alpha}$ – корреляционная матрица вектора $\Delta\alpha$.

Для любых реально возможных значений вектора $\Delta\beta$ можно найти $\Delta\alpha$, а по нему $\mu(\Delta\alpha)$ и $\delta\mu(\Delta\alpha)=\mu(\Delta\alpha)-\mu(0)$.

Обозначим через $\delta\mu_q(\Delta\beta_q)$ значение $\delta\mu(\Delta\alpha)$ при $\Delta\beta_q \neq 0$ и $\Delta\beta_i = 0$ для $i \neq q$. Тогда, как показано в [2],

$$a_q = \frac{1}{(\Delta\beta_{q0})^2}\left[\delta\mu_q(\Delta\beta_{q0}) + \delta\mu_q(-\Delta\beta_{q0})\right], \qquad (6)$$

где $\Delta\beta_{q0}$ – конкретное значение $\Delta\beta_q$, лежащее в пределах реально возможных значений $\Delta\beta_q$ (например, $\Delta\beta_{q0} = \sigma_{\beta_q}$).

Подставляя коэффициенты a_q в (4) и используя (5), получим оценку влияния случайного разброса параметров на вероятностную характеристику системы

$$\delta\lambda = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{m} a_q B K_{\alpha\alpha} B^{\mathrm{T}} . \qquad (7)$$

Пусть вероятностная характеристика представляет собой дисперсию установившегося случайного процесса в системе. Определим изменение дисперсии δD за счет случайно разброса параметров для передаточных функций

$$K_1(p) = \frac{k(1+p\tau)}{p(1+pT)} \text{ и } K_2(p) = \frac{k(1+p\tau)}{p^2(1+pT)} . \qquad (8)$$

Для нахождения дисперсий $D_1(\alpha)$ и $D_2(\alpha)$ при конкретном значении вектора α параметров k, τ и T воспользуемся таблицами [1]:

$$D_1(\alpha) = \pi G k \frac{T + k\tau^2}{T(1+k\tau)},\ D_2(\alpha) = \pi G \frac{1+k\tau^2}{\tau - T} . \qquad (9)$$

Путем непосредственного вычисления вторых производных получаем искомые изменения дисперсий:

$$\delta D_1(\alpha) = \pi G \left\{ \frac{\tau_0(\tau_0 - T_0)}{T_0(1+k_0\tau_0)^3}\sigma_k^2 + \frac{k_0^2\tau_0^2}{T_0^3(1+k_0\tau_0)^2}\sigma_T^2 + \frac{k_0^2(1+k_0T_0)}{T_0(1+k_0\tau_0)^3}\sigma_\tau^2 \right\}, \qquad (10)$$

$$\delta D_2(\alpha) = \pi G \left\{ \frac{1+k_0\tau_0^2}{(\tau_0 - T_0)^3}\sigma_T^2 + \frac{1+k_0T_0^2}{(\tau_0 - T_0)^3}\sigma_\tau^2 \right\}. \qquad (11)$$

Предположим, что относительные средние квадратические отклонения случайного разброса всех параметров одинаковы и равны σ. Поэтому $\sigma_k = k_0\sigma$, $\sigma_T = T_0\sigma$, $\sigma_\tau = \tau_0\sigma$. Для номинальных значений параметров $k_0 = 1\ \text{с}^{-1}$, $\tau_0 = 0{,}6\ \text{с}$, $T_0 = 1{,}3\ \text{с}$ из (10) получаем $\delta D_1 = 0{,}46 G\sigma^2$.

Библиографический список

1. Пугачев, В.Н. Комбинированные методы определения вероятностных характеристик / В.Н. Пугачев. – М.: «Советское радио», 1973. – 256 с.

2. Лившиц, Н.А. Вероятностный анализ систем автоматического управления /Н.А. Лившиц, В.Н. Пугачев. – М.: «Советское радио», 1963. – Т. 1. – 634 с.

О влиянии случайного изменения параметров модели системы на ее вероятностные характеристики

Е.А. Алёшин

Рассматриваются вопросы оценки влияния случайного разброса параметров модели системы на ее вероятностные характеристики с помощью аналитических и численных методов.
Ключевые слова: случайный разброс параметров, вероятностные характеристики, оценка, модель системы.

About influence of casual change of parameters of system model on its probabilistic characteristics

E.A. Alyoshin

Questions of assessment of influence of casual dispersion of parameters of system model on its probabilistic characteristics by means of analytical and numerical methods are considered.

Keywords: casual dispersion of parameters, probabilistic characteristics, assessment, model of system.

References

1. Pugachev V. N. *Kombinirovannye metody opredeleniya veroyatnostnykh kharakteristik* [The Combined Methods of Definition of Probabilistic Characteristics]. Moscow, "The Soviet radio" Publ., 1973, 256 p.
2. N. A. Livshits, V. N. Pugachev *Veroyatnostnyi analiz system avtomatocheskogo upravleniya* [Probabilistic analysis of systems of automatic control]. Moscow, "The Soviet radio" Publ., 1963vol. 1, 634 p.