

Моделирование и компьютерные технологии

УДК 517.9 + 519.6

DOI: 10.14529/ctcr150206

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н.М. Япарова

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

Рассмотрены некоторые обратные задачи для параболических уравнений с неизвестными начальными условиями и граничными условиями, известными на части границы. Указана принципиальная возможность построения численного решения этих задач в рассматриваемой области и предложена вычислительная схема метода, с помощью которой построено численное решение обратной задачи не только на границе, но и во всей рассматриваемой области при неизвестных начальных условиях.

С целью проверки эффективности предложенного метода был осуществлен вычислительный эксперимент. Результаты вычислительного эксперимента и найденные экспериментальные оценки погрешностей представлены в статье и свидетельствуют об эффективности предложенного численного метода.

Ключевые слова: параболические уравнения, обратная граничная задача, метод регуляризации, численный метод, вычислительная схема.

Введение

В прикладных задачах, связанных с исследованием нестационарных тепловых процессов, часто возникает ситуация, когда требуемые величины могут быть измерены только на части границы. Математические модели таких процессов содержат граничные условия, известные только на некоторой части границы и неизвестные на других ее участках. Как правило, для решения этих задач требуется знать начальное условие. Вместе с этим существует целый ряд прикладных исследований, при проведении которых невозможно определить начальные условия. К таким задачам, например, относится исследование электромагнитных и тепловых характеристик работающих двигателей, а также задачи геофизики, связанные с нагревом и охлаждением земной коры. Математические модели таких задач имеют вид обратных граничных задач с неизвестными начальными данными.

Проблеме разработки и исследованию методов решения обратных граничных задач посвящены работы многих исследователей. Так, в работе [1] изложены наиболее распространенные методы решения обратных граничных задач тепломассопереноса, в работе [2] рассмотрены итерационные регуляризирующие алгоритмы ньютоновского типа, в работах [3, 4] рассмотрены методы проекционной регуляризации. Методам решения обратной задачи теплопроводности с неподвижной границей, основанным на применении преобразований Лапласа, посвящены работы [5, 6].

В статье рассмотрена принципиальная возможность построения численного метода решения для обратных граничных задач с неизвестными начальными условиями и предложен новый метод решения такого рода задач. С целью оценки эффективности предложенного метода был проведен вычислительный эксперимент, результаты которого также представлены в данной работе.

Постановка задачи

Пусть $x \in (0, \ell)$. Обозначим $Q_T = (0, \ell) \times (0, T)$ для $T > 0$. Пусть функции $a(x, t), b(x, t), c(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$. Предположим, что $a(x, t) \in [A, a_1]$, $b(x, t) \in [b_0, b_1]$ и $c(x, t) \in [c_0, c_1]$, где $A, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 = \text{const} > 0$. Оператор L определим следующим образом

$$Lu = au_{xx} + bu_x + cu, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (1)$$

Пусть функция $u(x, t) \in C^{4,2}(\bar{Q}_T)$ является решением параболического уравнения

$$u_t = Lu(x, t) + f(x, t) \quad (x, t) \in Q_T \quad (2)$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$u(0, t) = p(t), \quad u_x(0, t) = g(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую (2), (3) в области \bar{Q}_T , а затем, используя полученные результаты, найти граничную функцию

$$u(\ell, t) = \phi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Предположим, что при некоторых $f(x, t) = f_0(x, t)$, $p(t) = p_0(t)$ и $g(t) = g_0(t)$ существует функция $u_0(x, t)$, удовлетворяющая (2), (3) и известно, что $\phi(t) \in H^{2,1+\beta}(0, T)$, где $\beta \in (0, 1)$, тогда из результатов, представленных в работах [7] и [8] следует единственность решения задачи (2)–(4) в некоторой области $\Omega_T \subset Q_T$. Предположим также, что существуют константы Φ, β, R такие, что

$$\max_{\bar{Q}_T} |u(x, t)| \leq \Phi e^{\beta(x+t)}, \quad \left\{ \max_{\bar{Q}_T} |u_t|, \max_{\bar{Q}_T} |u_{xx}|, \max_{\bar{Q}_T} |u_{xxxx}| \right\} \leq R. \quad (5)$$

Для решения поставленной задачи предложен метод дискретной регуляризации. Идея метода состоит в следующем. Решение исходной задачи сводим к решению уравнения

$$Lu + \alpha u = f, \quad (6)$$

с граничными условиями (3), где α – некоторый параметр регуляризации. Далее в области \bar{Q}_T вводим конечно-разностную сетку, состоящую из узлов (x_i, t_k) , $i = \overline{1, N_x + 1}$, $k = \overline{1, N_t + 1}$ и заменяем уравнение (6) в каждом узле сетки (x_i, t_k) его конечномерным аналогом. Затем, используя явные конечно-разностные схемы, получаем значения искомой функции на новом пространственном слое в точке (x_{i+1}, t_k) .

Одномерный метод дискретной регуляризации

Рассмотрим конечно-разностную сетку G в прямоугольнике Q_T ,

$$G = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, t_k) : x = (i-1)h_x, \quad t = (k-1)h_t, \\ h_x = \ell / N_x; \quad h_t = T / N_t; \quad i = \overline{1, N_x + 1}; \quad k = \overline{1, N_t + 1}, \end{array} \right. \quad (7)$$

где h_x и h_t – шаги сетки по переменным x и t соответственно. Рассмотрим множество дискретных функций $V_h = \{v(x_i, t_k) = v_{i,k}\}$, заданных на G . Следуя подходу, предложенному Самарским в работе [9], конечно-разностный аналог частных производных по x и по t в каждой точке G определен следующим образом:

$$v_x^{i,k} = \frac{v_{i+1,k} - v_{i,k}}{h_x}, \quad i = \overline{1, N_x}, \quad k = \overline{1, N_t + 1};$$

$$v_t^{i,k} = \frac{v_{i,k+1} - v_{i,k}}{h_t}, \quad i = 1, N_x + 1, k = 1, N_t.$$

$$v_{xx}^{i,k} = \frac{v_{i+1,k} - 2v_{i,k} + v_{i-1,k}}{h_x^2}, \quad i = 2, N_x, k = 1, N_t + 1 \quad (8)$$

Используя формулу Тейлора, получаем, что при любых $u(x,t) \in C^{4,2}(\bar{Q}_T)$ конечно-разностные аналоги (8) аппроксимируют частные производные с точностью $O(h_x)$ для ∂_x , и $O(h_x^2)$ для ∂_x^2 при $h \rightarrow 0$, а ∂_t аппроксимируется с точностью $O(h_t)$ при $h_t \rightarrow 0$.

Обозначим значения функции $f \in C(\bar{Q}_T)$ в соответствующих точках $(x_i, t_k) \in G$ как $f_{i,k}$, значения коэффициентов оператора L в этих же точках обозначим $a_{i,k}, b_{i,k}, c_{i,k}$, а значения функции $u(x,t) \in C^{4,2}(\bar{Q}_T)$ в точке $(x_i, t_k) \in G$ обозначим как $u_{i,k}$. Частным производным $\partial_{xx}^2, \partial_x, \partial_t$ сопоставим конечно-разностные аналоги, определенные формулами (8). Тогда конечно-разностный аналог уравнения (2) при $i = \overline{2, N_x + 1}, k = \overline{1, N_t}$ имеет вид

$$\frac{1}{h_t}(v_{i,k+1} - v_{i,k}) = \frac{a_{i,N_t+1}}{h_x^2}(v_{i+1,k} - 2v_{i,k} + v_{i-1,k}) + \frac{b_{i,N_t+1}}{h_x}(v_{i+1,k} - v_{i,k}) + c_{i,k} v_{i,k} + f_{i,k}, \quad (9)$$

где $\tilde{u}_{i,k}$ – дискретная функция. При $i = \overline{2, N_x + 1}, k = N_t + 1$ уравнения (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_t}(v_{i,N_t+1} - v_{i,N_t}) &= \frac{a_{i,N_t+1}}{h_x^2} \gamma (v_{i+1,N_t+1} - 2v_{i,N_t+1} + v_{i-1,N_t+1}) + \\ &+ \frac{b_{i,N_t+1}}{h_x} \gamma (v_{i+1,N_t+1} - v_{i,N_t+1}) + \gamma c_{i,N_t+1} v_{i,N_t+1} + \gamma f_{i,N_t+1} + \frac{a_{i,N_t}}{h_x^2} (1-\gamma) (v_{i+1,N_t} - 2v_{i,N_t} + v_{i-1,N_t}) + \\ &+ \frac{b_{i,N_t}}{h_x} (1-\gamma) (v_{i+1,N_t} - v_{i,N_t}) + (1-\gamma) c_{i,N_t} v_{i,N_t} + (1-\gamma) f_{i,N_t}, \end{aligned} \quad (10)$$

а условиям (3) соответствуют следующие соотношения:

$$v_{1,k} = p_k, \quad v_{2,k} - v_{1,k} = h_x g_k, \quad k = \overline{1, N_t + 1}, \quad (11)$$

где $v_{i,k}$ – дискретные функции, соответствующие конечно-разностным аппроксимациям в точке $(x_i, t_k) \in G$ функции $u(x,t) \in C^{4,2}(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющей (2), (3).

Известно, что предложенная схема неустойчива, поэтому мы добавим в (9), (10) слагаемое, содержащее параметр регуляризации $\alpha > 0$, и выразим $v_{i+1,k}$ из уравнений (9), (10) при $i = \overline{2, N_x + 1}$ и $k = \overline{1, N_t + 1}$. Тогда при $i = \overline{2, N_x + 1}, k = \overline{1, N_t}$ получим:

$$\begin{aligned} v_{i+1,k} &= 2 \frac{a_{i,k}}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} v_{i,k} - \frac{a_{i,k}}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} v_{i-1,k} + \frac{h_x^2}{(a_{i,k} + b_{i,k} h_x) h_t} (v_{i,k+1} - v_{i,k}) + \\ &+ \frac{h_x^2 b_{i,k}}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} v_{i,k} - \frac{h_x^2 c_{i,k}}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} v_{i,k} + \frac{h_x^2 \alpha}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} v_{i,k} - \frac{h_x^2}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} f_{i,k} = \\ &= \left[1 + \frac{a_{i,k} - h_x^2 c_{i,k}}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} - \frac{h_x^2}{(a_{i,k} + b_{i,k} h_x) h_t} \right] v_{i,k} - \frac{a_{i,k}}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} v_{i-1,k} + \\ &+ \frac{h_x^2}{(a_{i,k} + b_{i,k} h_x) h_t} v_{i,k+1} - \frac{\alpha h_x^2}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} v_{i,k} - \frac{h_x^2}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} f_{i,k}, \end{aligned} \quad (12)$$

а при $i = \overline{2, N_x + 1}$ и $k = N_t + 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
 v_{i+1, N_t+1} = & \frac{h_x^2}{(a_{i, N_t+1} + h_x b_{i, N_t+1}) h_t \gamma} (v_{i, N_t+1} - v_{i, N_t}) + \frac{a_{i, N_t+1}}{a_{i, N_t+1} + h_x b_{i, N_t+1}} (2v_{i, N_t+1} - v_{i-1, N_t+1}) + \\
 & + \frac{h_x^2 b_{i, N_t+1}}{a_{i, N_t+1} + h_x b_{i, N_t+1}} v_{i, N_t+1} - \frac{h_x^2 c_{i, N_t+1}}{a_{i, N_t+1} + h_x b_{i, N_t+1}} v_{i, N_t+1} - \frac{h_x^2}{a_{i, N_t+1} + h_x b_{i, N_t+1}} f_{i, N_t+1} - \\
 & - \frac{h_x^2}{(a_{i, N_t+1} + h_x b_{i, N_t+1}) \gamma} (1 - \gamma) \left[\frac{a_{i, N_t}}{h_x^2} (v_{i+1, N_t} - 2v_{i, N_t} + v_{i-1, N_t}) + \frac{b_{i, N_t}}{h_x} (v_{i+1, N_t} - v_{i, N_t}) \right] - \\
 & - \frac{h^2}{(a_{i, N_t+1} + h b_{i, N_t+1}) \gamma} (1 - \gamma) [c_{i, N_t} v_{i, N_t} + f_{i, N_t}] - \frac{\alpha h^2}{(a_{i, N_t+1} + h b_{i, N_t+1}) \gamma} v_{i, N_t}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где $v_{i,k}$ – дискретные функции, полученные из конечно-разностных уравнений (12), (13) при условии (11). Уравнения (12), (13) эквивалентны добавлению слагаемого $\alpha \tilde{u}$ в (10), (11). Метод дискретной регуляризации заключается в следующем. На первом этапе, используя (11), определим $v_{1,k}$, $v_{2,k}$ как

$$v_{1,k} = p_k, \quad v_{2,k} = p_k + h g_k, \quad k = \overline{1, N_t + 1}. \quad (14)$$

Затем, используя (12) и (13), находим $v_{i,k}$ в остальных узлах сетки.

Алгоритмические особенности метода

Оценим уклонение функций $v_{i,k}$ от $u_{i,k}$ в области $\overline{Q_T}$. С этой целью введем в рассмотрение функции $s_{i,k}$, w_i , определяемые формулой:

$$s_{i,k} = v_{i,k} - u_{i,k}, \quad w_i = \max_k |v_{i,k} - u_{i,k}|, \quad i = \overline{1, N_x + 1}, \quad k = \overline{1, N_t + 1},$$

где $v_{i,k}$ удовлетворяет (12), (13) с условиями (14), а $u_{i,k}$ удовлетворяет (2), (3). Естественно полагать, что для любого $i = \overline{1, N_x}$ имеет место неравенство $w_i \leq w_{i+1}$. Учитывая (14), получаем следующие оценки:

$$w_1 \leq \delta, \quad w_2 \leq \delta(1 + h) + O(h) \leq \delta + Rh. \quad (15)$$

Подставив (12) в (2), мы получаем при $i = \overline{2, N_x}$ и $k = \overline{1, N_t}$

$$\begin{aligned}
 s_{i+1,k} + \frac{\alpha h_x^2}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} u_{i,k} = & \left[1 + \frac{a_{i,k} - h_x^2 (1 + c_{i,k})}{a_{i,k} + b_{i,k} h} - \frac{h^2}{(a_{i,k} + b_{i,k} h) \tau} \right] s_{i,k} - \frac{a_{i,k}}{a_{i,k} + b_{i,k} h} s_{i-1,k} + \\
 & + \frac{h_x^2}{(a_{i,k} + b_{i,k} h_x) h_t} s_{i,k+1} + \frac{\alpha h_x^2}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} s_{i,k} + \frac{\alpha h^2}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} u_{i,k} + O(h_x^2 + h_t).
 \end{aligned}$$

Если $a_{i,k} - h_x^2 (1 + c_{i,k}) > 0$ при всех $i = \overline{3, N_x + 1}$ и $k = \overline{1, N_t}$, то, выполняя соответствующие преобразования и учитывая, что $w_i \leq w_{i+1}$ и $a_{i,k}, b_{i,k}, c_{i,k} > 0$ при всех $i = \overline{3, N_x}$ и $k = \overline{1, N_t}$, из последнего неравенства имеем:

$$\left| s_{i+1,k} + \frac{\alpha h_x^2}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} u_{i,k} \right| \leq \left(3 + \frac{2h_x^2}{Ah_t} + \frac{\alpha h_x^2}{A} \right) w_i + \frac{\alpha h_x^2}{A} \Phi e^{\beta(x+t)} + R(h_x^2 + h_t). \quad (16)$$

С другой стороны, $\left| s_{i+1,k} + \frac{\alpha h_x^2}{a_{i,k} + b_{i,k} h_x} u_{i,k} \right| \geq \max_k |s_{i+1,k}| - \frac{\alpha h_x^2}{A} \max_{i,k} |u_{i,k}| \geq w_{i+1} - \frac{\alpha h_x^2}{A} \Phi e^{\beta(x+t)}$.

Отсюда и из (16) следует, что

$$w_{i+1} \leq \left(3 + \frac{2h_x^2}{Ah_t} + \frac{\alpha h_x^2}{A} \right) w_i + \frac{2\alpha h_x^2}{A} \Phi e^{\beta(x+t)} + R(h_x^2 + h_t), \quad i = \overline{2, N_x}.$$

Обозначим $C = 3 + \frac{2h^2}{A\tau} + \frac{\alpha h^2}{A}$, тогда последнее неравенство примет вид

$$w_{i+1} \leq Cw_i + \frac{2\alpha h_x^2}{A} \Phi e^{\beta(x+t)} + R(h_x^2 + h_t), \quad i = \overline{2, N_x}. \quad (17)$$

Оценим w_{N_x+1} , используя (15) и (17), получаем

$$\begin{aligned} w_{N_x+1} &\leq C^{N_x-1}(\delta(1+h_x) + Rh_x) + \left(\frac{2\alpha h_x^2}{A} \Phi e^{\beta(x+t)} + R(h_x^2 + h_t) \right) \sum_{m=0}^{N_x-2} C^m \leq \\ &\leq C^{N_x-1} \left(\delta(1+h_x) + \frac{2\alpha h_x^2}{A} \Phi e^{\beta(x+t)} + R(h_x^2 + h_t + h_x) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Выберем h_x, h_t и так, что $Ah_t < 1$ и $\frac{2h_x^2}{Ah_t} \leq 1$, а параметр α выберем таким, что

$\frac{2\alpha h_x^2}{A} \Phi e^{\beta(x+t)} \leq \delta$, тогда $C < 5$ и (18) примет вид

$$w_{N_x+1} \leq 5^{N_x-1} \left(2\delta + 2R(Ah_t + \sqrt{Ah_t}) \right) \leq 2 \cdot 5^{N_x-1} \left(\delta + 2R\sqrt{Ah_t} \right).$$

Согласуем величины N_x и h_t с уровнем погрешности δ так, чтобы гарантированно было выполнено условие $w_{N_x+1} \leq \sqrt{M\delta}$ для некоторого $M > 0$. Для этого выберем N_x таким, что при некотором $H > 3$ для величины $M > 0$ такой, что $M > 4\delta \cdot 5^{2H}$, имеет место соотношение $N_x \leq 1 + \log_5 \frac{\sqrt{M\delta}}{2 \cdot (\delta + 2R\sqrt{Ah_t})}$. Отсюда следует, что, для соблюдения условия $w_{N_x+1} \leq \sqrt{M\delta}$ доста-

точно выбрать величины h_t, h_x и α из следующих условий:

$$h_t < \frac{\delta}{4AR^2} \left(\frac{\sqrt{M}}{2 \cdot 5^H} - \sqrt{\delta} \right)^2, \quad h_x^2 < \frac{Ah_t}{2}, \quad \alpha \leq \frac{A\delta}{2h_x^2 \Phi e^{\beta(x+t)}}. \quad (19)$$

Предложенный алгоритм послужил основой для разработки программного комплекса [10]. С целью проверки достоверности полученных результатов и оценки эффективности предложенной схемы был осуществлен вычислительный эксперимент. Эксперимент проводился для серии тестовых функций. В каждой серии проводилось по несколько повторных расчетов для каждой функции.

Вычислительный эксперимент

Основной целью вычислительного эксперимента являлась проверка принципиальной возможности построения регуляризованных решений обратных задач с неизвестными начальными условиями методом дискретной регуляризации. Объектами вычислительного эксперимента являлись построение во всей области Q_T численного решения задачи (2)–(4) с последующим вычислением соответствующей граничной функции (4). С целью получения экспериментальных оценок погрешностей были вычислены величины отклонения найденных граничных функций от тестовых значений.

На начальном этапе эксперимента была решена следующая прямая задача:

$$\begin{aligned} Lu &= f, \\ u(0, t) &= p(t), \quad u(\ell, t) = \phi(t), \quad u(x, 0) = q(x), \quad x \in (0, \ell), \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (20)$$

решение которой использовалось при оценке эффективности метода дискретной регуляризации. Вычислительный эксперимент проводился для серии тестовых функций, различных с точки зрения монотонности и непрерывности самой функции и ее производной. В каждой серии проводилось по несколько повторных расчетов для каждой функции. Во всех тестах мы полагаем $\ell = 1$, а $T = 1,5$. Для численной реализации метода выбирается равномерная сетка G , заданная формулой (7)

с параметрами h_t , h_x и α , удовлетворяющими (19). Основные этапы вычислительного эксперимента состоят в следующем:

1. Для тестовой функции решаем прямую задачу (20) методом конечных разностей. Получаем функцию $u_{test}(x, t)$.
2. Моделируем значение g_δ в каждой точке $t_k = (k-1)h_t$ по формуле $g_\delta(t_k) = g(t_k) + e_\delta(t_k)$, где $e_\delta(t_k)$ равномерно распределена на интервале $[g(t_k) - \delta; g(t_k) + \delta]$.
3. Решаем задачу (2)–(4) методом дискретной регуляризации. Получаем регуляризованное решение $u_\delta^\alpha(x, t)$ во всей области Q_T , затем вычисляем граничную функцию $u_\delta^\alpha(\ell, t)$.
4. Вычисляем величины $\|u_\delta^\alpha(\ell, t) - \phi(t)\|_C$, где $\phi(t)$ – тестовая функция.

Результаты вычислительного эксперимента для некоторых тестовых функций проиллюстрированы на нижеприведенных рисунках. Одномерные графики демонстрируют результаты вычислений граничной функции $u(1, t) = \phi(t)$, являющиеся решением задачи (2)–(4). Двумерные поверхности, названные "Exact solution" изображают графики функций $u(x, t)$, полученной на основе тестовых функций и являющейся решением прямой задачи (20), а поверхности, названные "Regularized solution" соответствуют регуляризованному решению $u_\delta^\alpha(x, t)$ задачи (2), (3), полученному во всей области Q_T методом дискретной регуляризации при неизвестных начальных условиях. Ось абсцисс соответствует значениям пространственной переменной временной $x \in [0, 1]$, ось ординат – переменной $t \in [0; 1,5]$, а ось аппликат связана со значениями функций $u(x, t)$ и $u_\delta^\alpha(x, t)$.

На всех рисунках используются одинаковые обозначения. Величина погрешности исходных данных, при которой проводились расчеты, обозначена δ . Величина α соответствует величине параметра регуляризации, в методе дискретной регуляризации. Обозначение $u(1, t)$ соответствует точному значению граничной функции $u(1, t) = \phi(t)$, а u_δ^α – граничной функции, найденной из численного решения $u(x, t)$ задачи (2)–(3) в точках (ℓ, t) , полученного методом дискретной регуляризации.

Пример 1. В этой серии экспериментов в качестве тестовые функции использовались непрерывные гладкие функции с одним экстремумом.

На рис. 1, а изображены результаты численного решения обратной задачи (2)–(4) для тестовой функции $u(1, t) = t(e^{-t} - e^{-1})$. На рис. 2 изображена поверхность, соответствующая численному решению задачи (2), (3), полученному методом дискретной регуляризации при неизвестных начальных данных, а также поверхность "Exact solution", соответствующая решению прямой задачи (20).

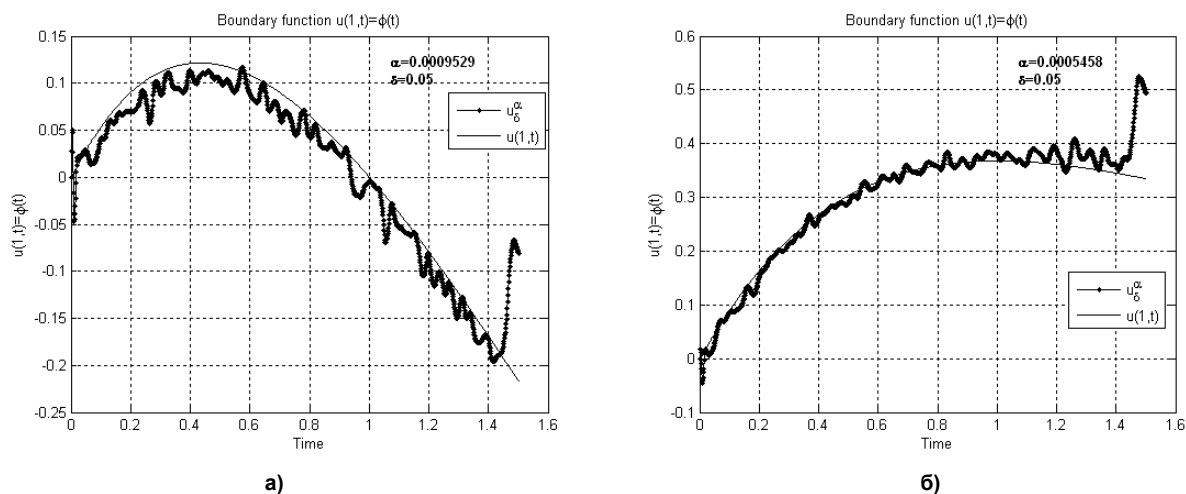


Рис. 1. Граничные функции, полученные в результате численного решения обратной задачи (2)–(4) для тестовых функций из примеров 1, 2

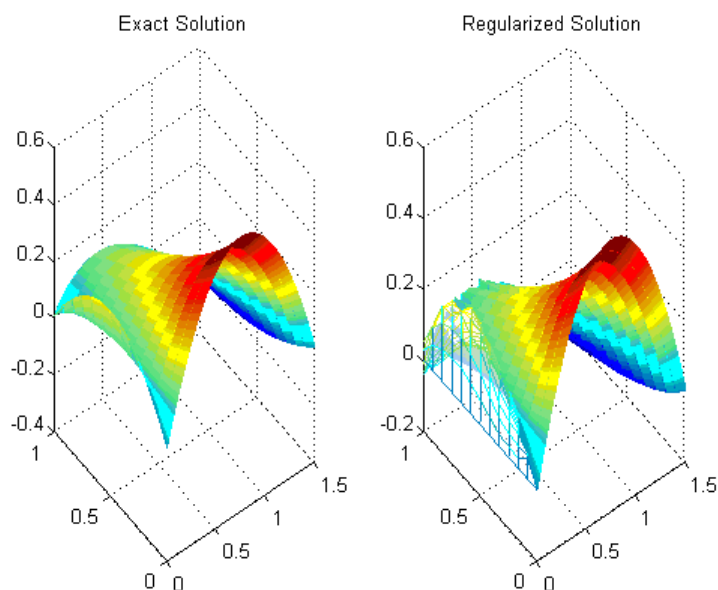


Рис. 2. Результаты численного решения обратной задачи (2), (3) во всей области $\overline{Q_T}$, полученные для тестовой функции из примера 1

Пример 2. В проведенной серии экспериментов рассматривались непрерывные функции с разрывными производными.

На рис. 1, б представлены графики численного решения обратной граничной задачи (2)–(4)

для тестовой функции $u(1,t) = \begin{cases} \frac{1}{t}(e^t - 1) - 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ Рис. 3 иллюстрирует результаты численного

решения задачи (2), (3) во всей области $\overline{Q_T}$. Этому решению соответствует поверхность "Regularized solution", а поверхность "Exact solution" соответствует решению задачи (20) для этой же тестовой функции.

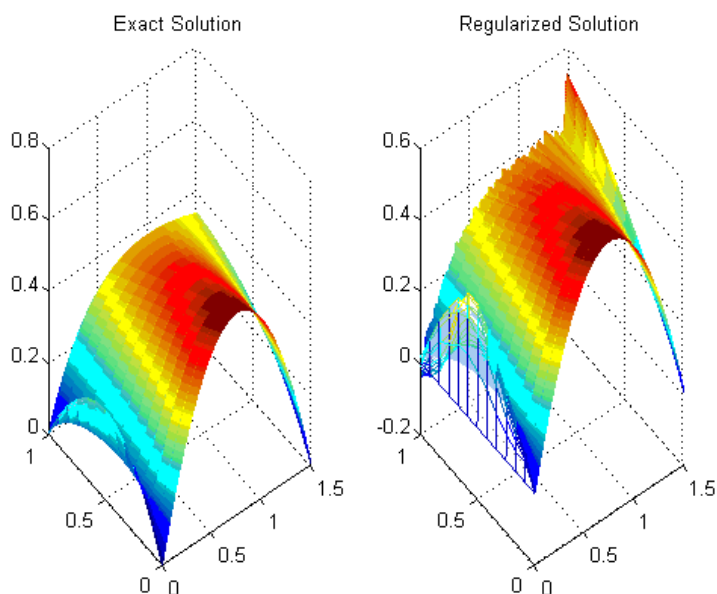


Рис. 3. Результаты численного решения обратной задачи (2), (3) во всей области $\overline{Q_T}$, полученные для тестовой функции из примера 2

Пример 3. В этой серии в качестве тестовых функций рассматривались непрерывные гладкие функции с несколькими экстремумами. На рис. 4, а изображены результаты численного решения обратной граничной задачи (2)–(5) для тестовой функции $u(1,t) = te^{-t} \sin(3\pi t)$. Рис. 5 иллюстрирует результаты численного решения задачи (2), (3), полученному во всей области Q_T методом дискретной регуляризации.

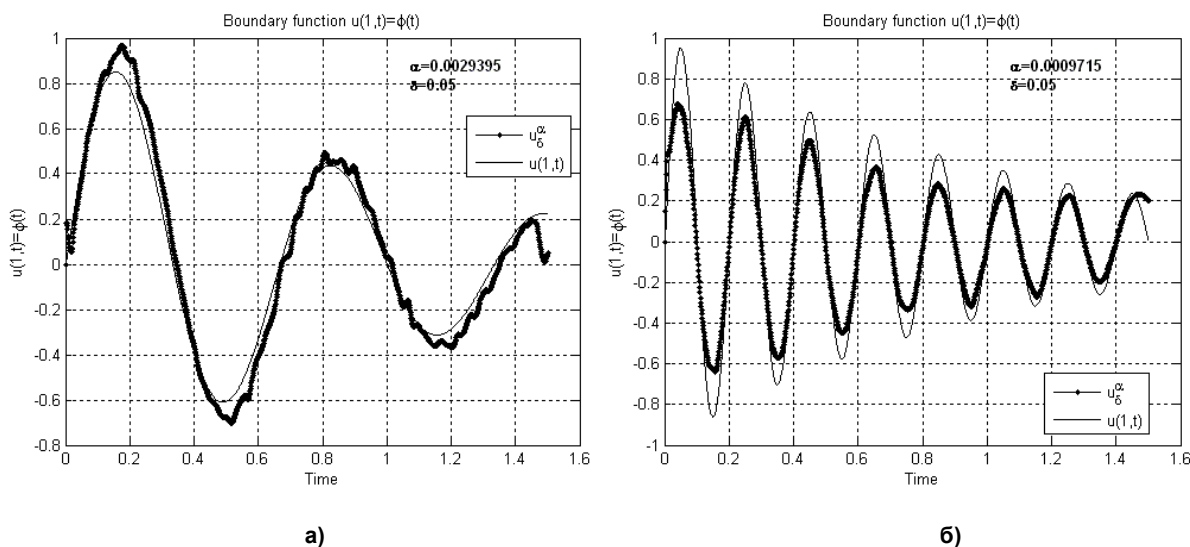


Рис. 4. Граничные функции, полученные в результате численного решения обратной задачи (2)–(4) для тестовых функций из примеров 3, 4

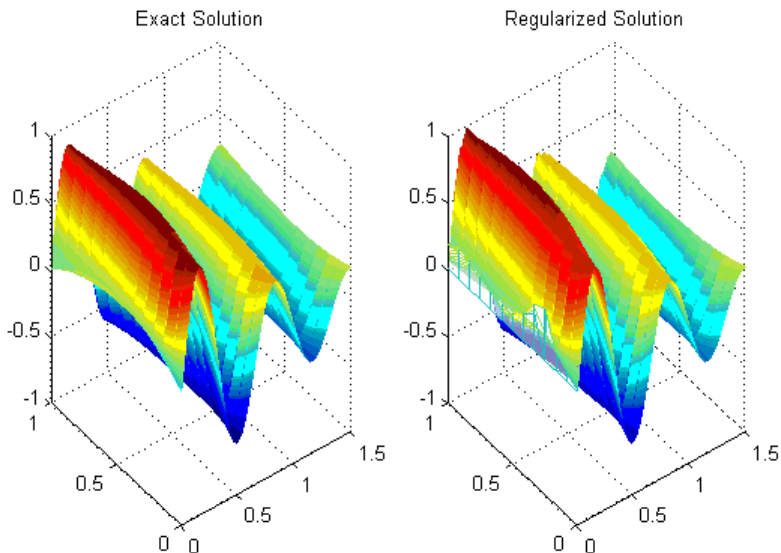


Рис. 5. Результаты численного решения обратной задачи (2), (3) во всей области $\overline{Q_T}$, полученные для тестовой функции из примера 3

Пример 4. В этой серии в качестве тестовых функций рассматривались непрерывные гладкие осциллирующие функции с несколькими экстремумами. На рис. 4, б изображены результаты численного решения обратной граничной задачи (2)–(5) для тестовой функции $u(1,t) = e^{-t} \sin(10\pi t)$. Рис. 6 иллюстрирует результаты численного решения задачи (2), (3), полученному во всей области $\overline{Q_T}$ методом дискретной регуляризации.

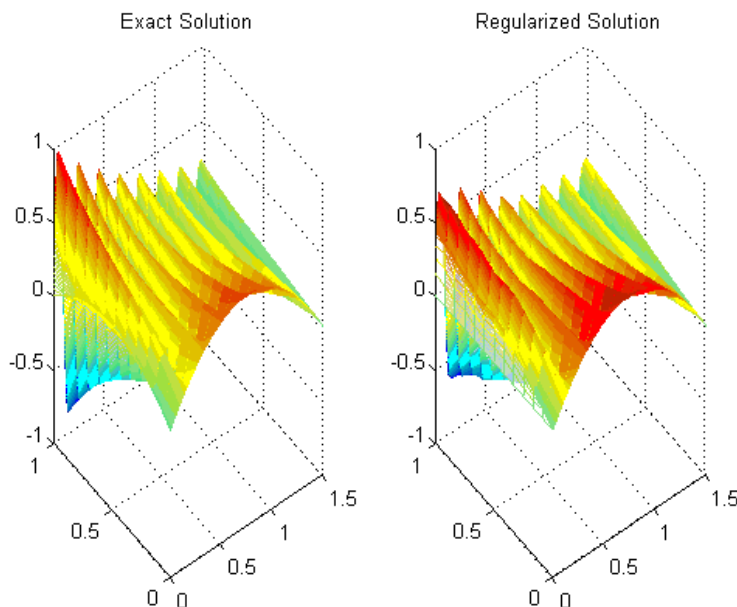


Рис. 6. Результаты численного решения обратной задачи (2), (3) во всей области $\overline{Q_T}$, полученные для тестовой функции из примера 4

С целью получения экспериментальных оценок погрешностей численного решения задачи (2)–(4) в каждой серии экспериментов были найдены величины $\|u_\delta^\alpha(\ell, t) - \phi(t)\|_C$. Средние значения этих величин, полученных в каждой серии эксперимента, представлены в таблице.

Экспериментальные оценки погрешностей

Тестовая функция	Величина δ	$\ u_\delta^\alpha(\ell, t) - \phi(t)\ _C$
$u(1, t) = t(e^{-t} - e^{-1})$	0,01	0,0204
	0,03	0,0708
	0,05	0,1506
$u(1, t) = \begin{cases} \frac{1}{t}(e^t - 1) - 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$	0,01	0,0211
	0,03	0,0698
	0,05	0,2131
$u(1, t) = te^{-t} \sin(3\pi t)$	0,01	0,0230
	0,05	0,0712
	0,1	0,2278
$u(1, t) = e^{-t} \sin(10\pi t)$	0,01	0,0203
	0,05	0,1903
	0,1	0,2307

На основании полученных результатов эксперимента можно сделать следующие выводы. Метод дискретной регуляризации, предложенный в статье, позволяет получать регуляризованные решения при неизвестных начальных данных с удовлетворительной точностью. Более того, с помощью этого метода становится возможным не только найти граничную функцию, но и построить приближенное решение обратной граничной задачи во всей области устойчивости при неизвестных начальных данных. Эти особенности метода дискретной регуляризации являются несомненным преимуществом предложенного метода дискретной регуляризации.

Заключение

В статье предложен метод решения обратных задач с неизвестными начальными данными. Метод дискретной регуляризации, предложенный в статье, позволяет получать регуляризованные решения во всей области при неизвестных начальных условиях, а также находить неизвестные граничные функции. Применение этого метода позволило впервые получить решение обратных задач при неизвестных начальных условиях. Экспериментальные оценки погрешности полученных решений свидетельствуют о достаточной устойчивости численных решений.

Литература

1. Alifanov, O.M. *Inverse Heat Transfer Problems International Series in Heat and Mass Transfer* / O.M. Alifanov. – New York, Springer, 2011.
2. Vasin, V.V. *Modified Newton-type processes generating Feje'r approximations of regularized solutions to nonlinear equations* / V.V. Vasin // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. – 2014. – Vol. 284, no. 1. – P. 145–158.
3. Tanana, V.P. *Oder-Optimal Method for solving an inverse problem for a parabolic equation* / V.P. Tanana // *Mathematics Reports*. – 2006. – Vol. 407, no. 3. – P. 316–318.
4. Танана, В.П. *Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач* / В.П. Танана, Н.М. Япарова // *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 2006. – Т. 9, № 4. – P. 353–368.
5. *Laplace inversion of low-resolution NMR relaxometry data using sparse representation methods* / P. Berman, O. Levi, Y. Parmet et al. // *Concepts in Magnetic Resonance Part A*. – 2013. – 42(3). – P. 72–88. DOI: 10.1002/cmr.a.21263
6. Yaparova, N.M. *Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem* / N.M. Yaparova // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2014. – Vol. 22, № 5. – P. 832–847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614
7. Ладыженская, О.А. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
8. Лаврентьев, М.М. *Некорректные задачи математической физики и анализа* / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
9. Самарский, А.А. *Теория разностных схем* / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
10. *Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014614775 Российская Федерация. Программа моделирования распределения одномерного теплового режима на границе при неизвестных начальных условиях* / Н.М. Япарова (РФ); правообладатель Южно-Уральский государственный университет (РФ). – Заявка № 2014612053 от 12.03.2014.

Япарова Наталья Михайловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; ddjy@math.susu.ac.ru.

Поступила в редакцию 5 февраля 2015 г.

DOI: 10.14529/ctcr150206

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING SOME INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS WITH UNKNOWN INITIAL CONDITIONS

N.M. Yaparova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation; ddjy@math.susu.ac.ru

The article deals with some inverse Cauchy problems for parabolic equations with unknown initial conditions. The principal possibility of construction the numerical solution of these problems in this domain is showed. The computational scheme is proposed which allows to construct the numer-

ical solution of the inverse problem both on the whole domain and on the boundary under unknown initial conditions.

To evaluate the efficiency of the proposed method the computational experiment was carried out. The results of the experiments show the sufficient stability of numerical solutions and the advantages of the proposed method.

Keywords: parabolic equations, inverse boundary problem, regularization method, numerical method, computational scheme.

References

1. Alifanov O.M. Inverse Heat Transfer Problems International Series in Heat and Mass Transfer. New York, Springer, 2011, 324 p.
2. Vasin V.V. Modified Newton-type Processes Generating Feje'r Approximations of Regularized Solutions to Nonlinear Equations. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, 284 (1), pp. 145–158.
3. Tanana V.P. Oder-Optimal Method for Solving an Inverse Problem for a Parabolic Equation. *Mathematics Reports*, 2006, 407 (3), pp. 316–318.
4. Tanana V.P., Yaparova N.M. [The Optimum in Order Method of Solving Conditionally-correct Problems]. *Siberian Journal of Numerical Mathematics*, Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci., 2006, Vol. 9, no 4, pp. 353–368. (in Russ.)
5. Berman P., Levi O., Parmet Y., Saunders M. and Wiesman Z. Laplace Inversion of Low-resolution NMR Relaxometry Data Using Sparse Representation Methods. *Concepts in Magnetic Resonance Part A*, 2013, vol. 42, no 3, pp. 72–88.
6. Yaparova N.M. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2014, vol. 22, no 5, pp. 832–847.
7. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type]. Moscow, Nauka, 1980, 736 p.
8. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis], Moscow, Nauka, 1980, 286 p.
9. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1977, 656 p.
10. Yaparova N.M. *Programma modelirovaniya raspredeleniya odnomernogo teplovogo rezhima na granites pri neizvestnykh nachal'nykh usloviyakh* [The Program of Modeling of Distribution of the One-dimensional Thermal Mode on the Border under Unknown Initial Conditions]. Certificate on the state registration of the computer programs № 2014614775 (demand № 2014612053, 12.03.2014).

Received 5 February 2015

БИБЛИОГРАФИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТАТЬИ

Япарова, Н.М. Численный метод решения некоторых обратных задач теплопроводности с неизвестными начальными условиями / Н.М. Япарова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2015. – Т. 15, № 2. – С. 55–65. DOI: 10.14529/ctcr150206

REFERENCE TO ARTICLE

Yaparova N.M. Numerical Method for Solving Some Inverse Heat Conduction Problems with Unknown Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 55–65. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr150206