УДК 517.9

ОБ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛН БУССИНЕСКА – ЛЯВА

А.А. Замышляева

Представлено описание программного комплекса «Моделирование волн Буссинеска – Лява», который состоит из четырех модулей и реализует алгоритм численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова (Коши) с условием Дирихле на отрезке, на графе, в прямоугольнике или в круге (по выбору пользователя) для уравнения Буссинеска – Лява, в зависимости от заданных коэффициентов и начальных данных. Указанное уравнение моделирует продольные колебания в стержне (случай отрезка), в конструкции (случай графа), распространение волн на мелкой воде или в диспергирующих средах (случай прямоугольника или круга). В алгоритме реализован метод фазового пространства и модифицированный метод Галеркина. В каждом из четырех модулей вычисляются собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в соответствующей области, находится решение в виде галеркинской суммы по нескольким первым собственным функциям. Программа позволяет строить график численного решения указанных задач. Результаты могут быть полезными для специалистов в области математической физики и математического моделирования.

Ключевые слова: задача Шоуолтера – Сидорова, уравнение Буссинеска – Лява, уравнение соболевского типа, метод фазового пространства, метод Галеркина.

Введение

Пусть Ω ограниченная область в R^n, $n \in N$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \overline{R_+}$ рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + f \tag{1}$$

с краевым

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{R}_+ \tag{2}$$

и начальными условиями Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(u(x,0) - u_0(x)) = 0, (\lambda - \Delta)(\dot{u}(x,0) - u_1(x)) = 0, \tag{3}$$

где $\alpha, \beta, \lambda, \lambda', \lambda'' \in R$, $u(x,t)$ – искомая функция, она может иметь различный физический смысл в зависимости от задачи [1–3]. Уравнение (1) является более общим случаем уравнения

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial\, t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial\, x^2} = mc_0^2 \tau \frac{\partial^3 \rho}{\partial\, t^2 \partial x} - mc_0^2 \frac{\partial^4 \rho}{\partial\, t^2 \partial x^2}, \tag{4}$$

где ρ – плотность, c_0 – скорость звука, τ – время релаксации, первый член в правой части отвечает за затухание звуковой волны вследствие теплопроводности и вязкости, а второй регулирует дисперсионные эффекты. Уравнение (3) описывает распространение гравитационно-гироскопических волн в диспергирующих средах, например, поверхностно-акустические волны. В дальнейшем волны, распространение которых описывается уравнением (1), будем называть волнами Буссинеска – Лява. Задача (1)–(3) сводится в подходящих банаховых пространствах к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, P(\dot{u}(0) - u_1) = 0, \tag{5}$$

где P – некоторый спектральный проектор, для уравнения соболевского типа

$$A\ddot{u} = B_1\dot{u} + B_0 u. \tag{6}$$

Стоит отметить, что задача Шоуолтера – Сидорова является частным случаем начально-конечной задачи [4, 5] и более естественной для уравнений соболевского типа [6], чем задача Коши. Кроме того, это условие более удобно при численном решении, так как освобождает от проверки принадлежности начальных условий фазовому пространству уравнения (6). В данной статье представлен алгоритм программы для нахождения приближенного решения задачи (1)–(3) при произвольных начальных значениях $u_0(x), u_1(x)$.

1. Задача Шоуолтера – Сидорова для уравнения Буссинеска – Лява

Задачу (1)–(3) сведем к абстрактной задаче (5), (6), для этого зададим пространства

$U = \{u(x,t) \in W_2^{l+2}(\Omega \times \bar{R}_+) \,|\, u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times \bar{R}_+\}$,

$F = W_2^l(\Omega \times \bar{R}_+)$.

Тогда операторы A, B_1, B_0 имеют следующий вид $A = (\lambda - \Delta)$, $B_1 = \alpha(\Delta - \lambda')$, $B_0 = \beta(\Delta - \lambda'')$ и принадлежат пространству $L(U,F)$ (линейных и ограниченных операторов). Обозначим через $\sigma(\Delta) = \{\lambda_k\}$ множество собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω, а через $\{\varphi_k\}$ – множество соответствующих собственных функций, ортонормированных в смысле скалярного произведения в пространстве $L_2(\Omega)$. Построим проектор $P(\bullet) = I - \sum\limits_{\lambda=\lambda_k} < \bullet, \varphi_k > \varphi_k$ в пространстве U. Тогда условия Шоуолтера – Сидорова (3) можно переписать в виде

$$\sum_{\lambda_k \neq \lambda} < u(0) - u_0(x), \varphi_k(x) > \varphi_k = 0, \quad \sum_{\lambda_k \neq \lambda} < \dot{u}(0) - u_1(x), \varphi_k(x) > \varphi_k = 0.$$

Редукция задачи (1)–(3) к задаче (5), (6) окончена.

Заметим, что в случае задачи Шоуолтера – Сидорова начальные условия задаются как проекции на образ оператора при старшей производной, который в случае, когда ∞ – устранимая особая точка *A*-резольвенты пучка $\vec{B}$, совпадает с образом проектора P. Таким образом, начальные значения задачи Шоуолтера – Сидорова автоматически попадают в фазовое пространство заданного уравнения и, следовательно, для задачи (1)–(3) справедлива.

Теорема 1 [5]. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

(*i*) $\lambda \notin \{\lambda_k\}$;

(*ii*) $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda \neq \lambda')$;

(*iii*) $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$.

Тогда для любых $u_0, u_1 \in U$ *существует единственное решение задачи (1)–(3).*

2. Алгоритм численного моделирования колебаний в диспергирующих средах (построение волн Буссинеска – Лява)

На основе теоретических результатов был разработан алгоритм численного решения задачи (1)–(3) и моделирования волн Буссинеска – Лява, реализованный в программном комплексе в среде Maple 15.0. Разработанный программный комплекс позволяет:

1. Выбрать область моделирования волн Буссинеска – Лява: отрезок, граф, прямоугольник или круг. Ввести параметры, характеризующие область: длину отрезка, длины ребер графа, длины сторон прямоугольника, радиус круга.
2. Ввести параметры уравнения: $\alpha, \beta, \lambda, \lambda', \lambda''$, начальные данные: $u_0(x), u_1(x)$, и количество галеркинских приближений N.
3. Вывести численное решение задачи.
4. Получить графическое изображение полученных волн с анимацией их распространения с течением времени.

В программном комплексе реализован метод фазового пространства и модифицированный метод Галеркина, создан пользовательский интерфейс. Принцип работы: пользователь выбирает одну из программ комплекса, в зависимости от области задания пространственных переменных (отрезок, граф, прямоугольник или круг), вызывается соответствующий модуль программы. В каждом модуле задается уравнение Буссинеска – Лява, вводятся значения параметров данного уравнения. Находятся собственные функции и собственные значения соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. Задается порядок искомого галеркинского приближенного решения. Составляется система дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов галеркинского приближения. Выводится решение и изображение волны Буссинеска – Лява.

Алгоритм численного решения в каждом из модулей представлен блок-схемой на рис. 1.

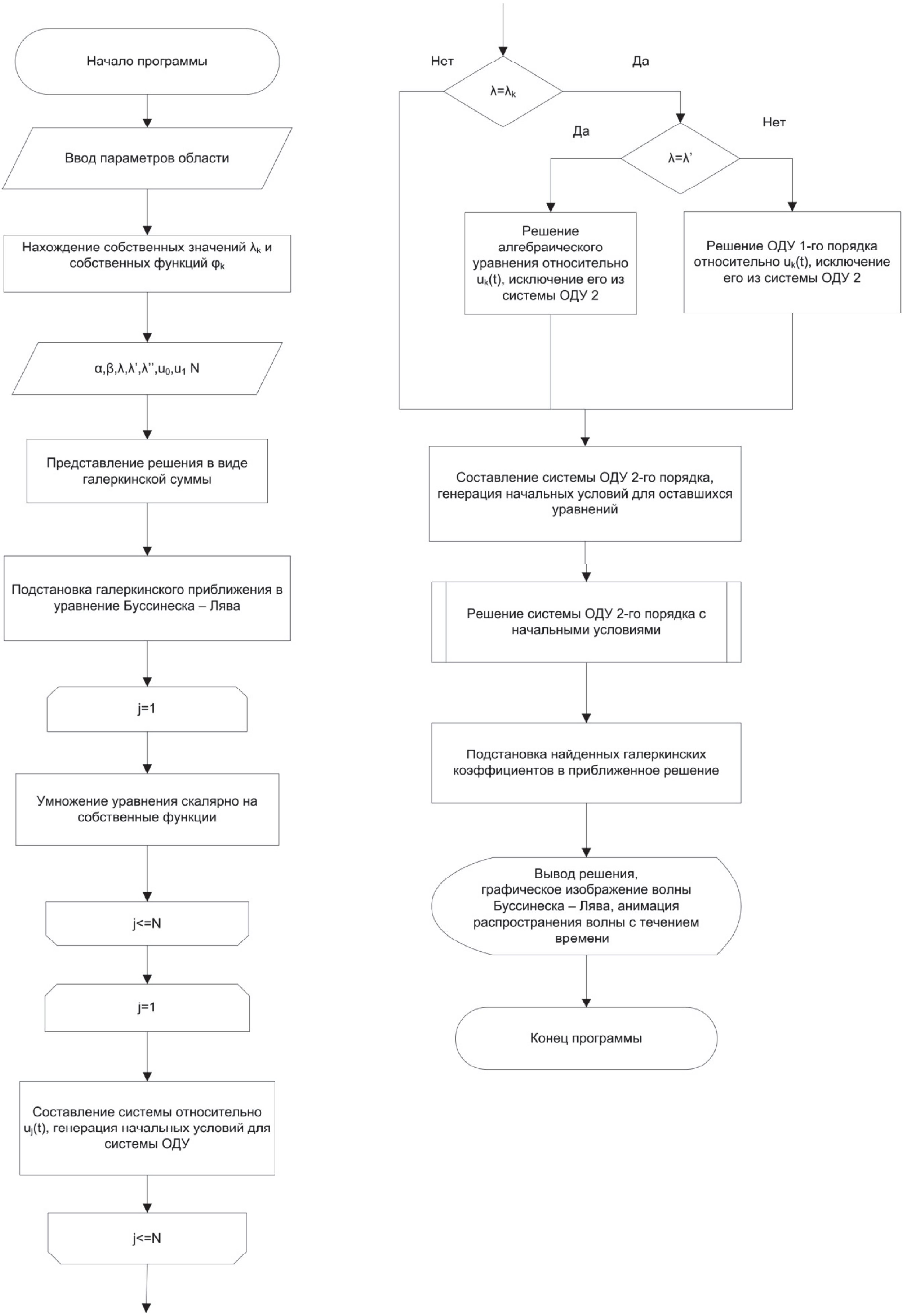

Рис. 1. Блок-схема алгоритма

3. Вычислительный эксперимент

Требуется найти численное решение задачи (1)–(3) при $\lambda = \lambda' = -1, \lambda'' = 0,\ \alpha = \beta = 1$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ u_0 = \sin(2x)$, $u_1 = \sin(3x)$ на отрезке $[0,\pi]$.

В полосе $[0,\pi]\times\overline{R}_+$ рассмотрим задачу

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = \sin(2x),\quad \dot{u}(x,0) = \sin(3x), \tag{8}$$

$$(-1-\Delta)\ddot{u} = (-1-\Delta)\dot{u} + \Delta u. \tag{9}$$

Собственные функции $\varphi_k(x)$ однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа на отрезке $[0,\pi]$ имеют вид $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)$. Очевидно, уравнение (9) вырождено. В этом случае фазовым пространством является пространство, ортогональное $span(\varphi_1(x))$. Взяв три слагаемых в галеркинском приближении, будем искать решение в виде

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(u_1(t)\sin(x) + u_2(t)\sin(2x) + u_3(t)\sin(3x)),$$

при этом $u_1(t) = 0$. Подставив $u(x,t)$ в уравнение (9) и умножив скалярно в смысле $L_2(0,\pi)$ полученное равенство на функции $\varphi_k(x)$, $k = 2,3$, получим систему дифференциальных уравнений для нахождения $u_k(t)$. Решая ее, получим

$$u(x,t) = \left(\left(-\frac{1}{38}\sqrt{57}+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{6}\left(3+\sqrt{57}\right)t} + \left(\frac{1}{38}\sqrt{57}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{6}\left(-3+\sqrt{57}\right)t}\right)\sin 2x +$$

$$+\left(\frac{1}{11}\sqrt{22}e^{\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{22}\right)t} - \frac{1}{11}\sqrt{22}e^{-\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{22}\right)t}\right)\sin 3x.$$

График распространения волны изображен на рис. 2.

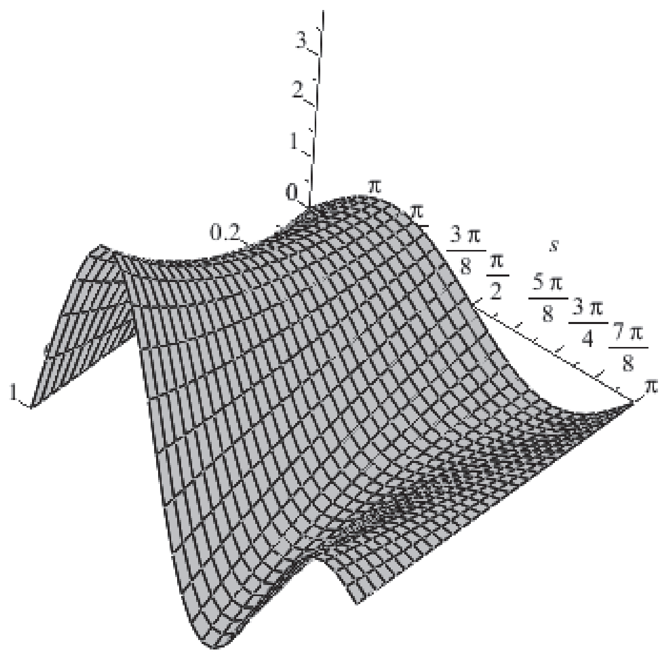

Рис. 2. Распространение волны

Автор выражает благодарность научному консультанту Свиридюку Георгию Анатольевичу за его мудрые советы и поддержку.

Литература

1. *Wang, C. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation / C. Wang // Mathematical Analysis and Application. – 2002. – Vol. 274. – P. 846–866.*
2. *Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 624 с.*
3. *Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VII: Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.*
4. *Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.*
5. *Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 10, № 37 (254). – С. 22–29.*
6. *Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Tokyo: VSP, 2003. – 268 p.*
7. *Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.*

Замышляева Алена Александровна, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); zamyshliaevaaa@susu.ac.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics"
2013, vol. 13, no. 4, pp. 24–29

ON ALGORITHM OF NUMERICAL MODELLING OF THE BOUSSINESQ – L'OVE WAVES

***A.A. Zamyshlyaeva**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,*
zamyshliaevaaa@susu.ac.ru

The article is devoted to the description of the software complex «Modeling of the Boussinesq – L'ove waves», which consists of four modules and implements the algorithm of numerical solution of the problem Showalter – Sidorov (Cauchy) with Dirichlet condition on a segment, on a graph, in a rectangle or a circle (user selectable) for the Boussinesq – L'ove equation, depending on the coefficients and the initial data. Specified equation models the longitudinal fluctuations in the elastic rod (in case of a segment), in construction (case of graph), propagation of waves in shallow water or in dispersive environments (case of rectangle or circle). The algorithm implemented the method of phase space and modified Galerkin method. In each of the four modules the eigenvalues and the eigenfunctions for the Laplace operator in the relevant domain are computed, the solution in the form of Galerkin sum by the first several eigenfunctions is found. The program allows drawing a graph for the numerical solution of the specified problems. The results may be useful for specialists in the field of mathematical physics and mathematical modeling.

Keywords: Showalter – Sidorov problem, Boussinesq – L'ove equation, Sobolev type equation, phase space method, Galerkin method.

References

1. Wang C. Small Amplitude Solutions of the Generalized IMBq Equation. *Mathematical Analysis and Application*, 2002, Vol. 274, pp. 846–866.

2. Whitham G. *Lineynye i nelineynye volny* [Linear and Nonlinear Waves]. Moscow, Mir, 1977. 624 p.

3. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fisika, VII. Teoriya uprugosti* [Theoretical Physics, VII. The Elasticity Theory]. Moscow, Nauka, 1987. 248 p.

4. Zagrebina S.A. The Initial-Finite Problems for Nonclassical Models of Mathematical Physics [Nachalno-konechnye Zadachy dlya Neklassicheskikh Modeley Matematicheskoy Fiziki]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 5–24. (in Russian)

5. Zamyshlyaeva A.A. The Initial-finish Problem for the Nonhomogeneous Boussinesq – L'ove Equation [Nachalno-konechnaya Zadacha dlya Neodnorodnogo Uravneniya Bussineska – Lyava]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2011, vol. 10, no. 37 (254), pp. 22–29. (in Russian)

6. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. [Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators]. *Utrecht, Boston, Köln, Tokyo*: VSP, 2003. 268 p.

7. Zamyshlyaeva A.A. *Lineynye uravneniya sobolevskogo tipa vysokogo poryadka* [Linear Sobolev Type Equations of High Order]. Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 107 p.

Поступила в редакцию 18 июля 2013 г.